2.31) Si $x \in Nu(L) + Nu(A)$, entonces

$x = x_1 + x_2$ con $x_1 \in Nu(L)$ y $x_2 \in Nu(A)$ :

~~A~~ $A(L(x)) = A(L(x_1 + x_2)) = A(L(x_1) + L(x_2)) = A(L(x_1)) + A(L(x_2))$

que por (I) $L \circ A = A \circ L$ $\rightarrow$ $= A(L(x_1)) + L(A(x_2)) = \underline{A(0) + L(0)} =$

por $x_1 \in Nu(L)$
y $x_2 \in Nu(A)$

$= 0 + 0 = 0$, por lo tanto, ~~[illegible]~~
$x \in Nu(A \circ L)$

y $\rightarrow$ $Nu(L) + Nu(A) \subseteq Nu(A \circ L)$ ✓

b) Si $w \in Nu(A)$ tq ~~...~~ $A(w)=0$ ~~...~~ y $L(v)=w$

~~...~~

$A(L(v)) = A(w) = 0$, por lo tanto toda solución de $L(v)=w$ pertenece a $Nu(A \circ L)$

c) Si $w \in Nu(A) \cap Im(L) \to w \in Im(L) \to L(x)=w$

Por b) vimos que si $w \in Nu(A)$ y $L(x)=w$, entonces $x \in Nu(A \circ L)$, como, por hipótesis, $Nu(L) \oplus S = Nu(A \circ L)$ y $x \in Nu(A \circ L)$, hay únicos $z \in Nu(L)$ y $v \in S$ tq:

$$z+v = x$$

$$\to L(x) = w \to L(z+v) = w \to \underbrace{L(z)}_{=0} + L(v) = w$$

Como $z \in Nu(L) \to L(v) = w$ y como dijimos antes al estar en suma directa $Nu(L) \oplus S = Nu(A \circ L)$, ese $v \in S$ es único.

d) • $Nu(A \circ L) = Nu(A) \oplus Nu(L)$

Por a) sabemos que $Nu(L) + Nu(A) \subseteq Nu(A \circ L)$ I

Para probar la otra inclusión, sabemos que $Nu(A \circ L)$ es de dimensión finita.

Como $Nu(A) \subseteq Nu(A) \oplus Nu(L)$ y I :

$\rightarrow Nu(A) \subseteq Nu(A \circ L) \rightarrow \dim(Nu(A)) \leq \dim(Nu(A \circ L))$

Si $\dim(Nu(A)) = 0 \rightarrow Nu(L) = Nu(A \circ L)$

$\rightarrow Nu(A \circ L) = Nu(L) = \{0\} \oplus Nu(L) = Nu(A) \oplus Nu(L)$ ✓

Si $\dim(Nu(A)) > 0$ (finito)

Sea $\{v_1, \dots, v_n\}$ base de $Nu(A) \rightarrow L(v_i) \in Nu(A)$ $\forall i \in [1, \dots, n]$

Vemos que $\{L(v_1), \dots, L(v_n)\}$ es LI:

$\alpha_1 L(v_1) + \dots + \alpha_n L(v_n) = 0 \rightarrow L(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n) = 0$

entonces $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n \in Nu(L)$ y por ser CL de elem. de $Nu(A)$, $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n \in Nu(A) \rightarrow \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n \in Nu(A) \cap Nu(L) = \{0\}$ por HIP

entonces $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = 0 \rightarrow$ como $v_1, v_2, \dots, v_n$ es LI por ser base $\rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$. Entonces $\{L(v_1), \dots, L(v_n)\}$ es LI.

entonces es una base de $Nu(A)$.

Ahora, si $x \in Nu(A \circ L) \rightarrow (A \circ L)(x) = A(L(x)) = 0 \rightarrow L(x) \in Nu(A)$

Como $\{L(v_1), \dots, L(v_n)\}$ es base de $Nu(A)$, existen $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{K}$ tq

$L(x) = b_1 \cdot L(v_1) + \dots + b_n \cdot L(v_n) \rightarrow L(x) = L(b_1 v_1 + \dots + b_n v_n)$

$\rightarrow 0 = L(x) - L(b_1 v_1 + \dots + b_n v_n) = L(x - b_1 v_1 - \dots - b_n v_n) \rightarrow x - b_1 v_1 - \dots - b_n v_n \in Nu(L)$

Como $x = \underbrace{[b_1 v_1 + \dots + b_n v_n]}_{\in Nu(A)} + \underbrace{[x - b_1 v_1 - \dots - b_n v_n]}_{\in Nu(L)}$

$\rightarrow x = x_1 + x_2$, $x_1 \in Nu(A)$, $x_2 \in Nu(L)$, $\rightarrow$ $x \in Nu(A) \oplus Nu(L)$

y como $Nu(A \circ L) \subseteq Nu(A) \oplus Nu(L) \rightarrow \boxed{Nu(A \circ L) = Nu(A) \oplus Nu(L)}$ ✓